

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

50e jaargang
1974/1975
no 10
juni/juli

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 25,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 26,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen.
Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.
Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 5,— (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).
Prijs nummer 4/5 *f* 9,50.

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.
Tarieven: $^1/_1$ pag. *f* 225,—, $^1/_2$ pag. *f* 120,— en $^1/_4$ pag. *f* 67,50.

Het wiskunde-onderwijs op het hellende vlak

Door collega D. van den Haak is aan verscheidene personen en instanties een brief verzonden waarin hij zijn bezorgdheid uitspreekt over de gang van zaken in het huidige wiskunde onderwijs. De titel van de brief is als titel van dit artikel gekozen.
Hieronder volgen de passages uit de brief.

In een artikel afgedrukt in "Euclides", mei 1961, pleit Prof. Dr. N. H. Kuiper voor de invoering van moderne structuren (verzamelingen, enz.) in het middelbaar onderwijs.
Hij schrijft: "Over het onderwijs in de schoolalgebra in de eerste jaren heb ik weinig op te merken. De technische vaardigheid die men ontwikkelt, is noodzakelijk voor elk verdergaand wiskundig of natuurwetenschappelijk werken. Dit realiseert men zich vooral indien men studenten uit onderontwikkelde gebieden ontmoet."

Prof. H. Th. M. Leeman, voorzitter van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, twijfelde aan deze uitspraak, want in zijn installatierede ("Euclides", febr. 1962) zegt hij: "Elke poging om het leerplan te moderniseren zal er op gericht moeten zijn om zoveel mogelijk leerlingen mee te nemen naar deze hogere etage. Dat hier grote moeilijkheden liggen van methodische en didactische aard spreekt vanzelf, moeilijkheden die niet zonder ernstig experimenteren kunnen worden opgelost .... Men kan zich de vraag stellen of de sterke discrepantie tussen de moderne wiskunde en schoolwiskunde wel een voldoend motief is om het leerplan van de middelbare school te gaan moderniseren .... Het zou mogelijk kunnen zijn dat juist de oudere delen van de wiskunde didactisch de beste voorbereiding tot de moderne wiskunde vormen. Hoewel dit niet erg waarschijnlijk is, lijkt het me toch noodzakelijk dat deze commissie ook aan dit probleem aandacht zal geven. Tenslotte zijn alle grote mathematici van nu langs deze weg gegaan."

Is aan dit probleem aandacht geschonken? .....

Mijn mening is: we moeten onze leerlingen eerst technische (wiskundige)

vaardigheden en begrippen leren en pas daarna structuren. We zullen de leerlingen eerst wiskundige vaardigheid en begrippen (de elementen van ons vak) moeten leren (en dus houvast geven). Zonder de aanwezigheid van elementen is elk nadenken over en het begrijpen van structuren onmogelijk. We zullen onze leerlingen eerst stap voor stap de oude schoolalgebra (de elementen) moeten bijbrengen en pas daarna laten nadenken over patronen en structuren; zonder elementen is elk structureel denken onmogelijk! Als we deze twee zaken (structuren en routine) tegelijkertijd aanpakken, ontbreekt het de leerlingen aan het zo nodige houvast. ....

"Ze kunnen niets meer", "gebrek aan routine" zijn kreten, die je thans overal kan beluisteren. Alles loopt vast, want zonder routine kom je niet ver. Als je voor de klas poogt transfer aan te brengen om het geleerde uit de vorige hoofdstukken te integreren in de nieuwe leerstof, kunnen de leerlingen je nauwelijks volgen, omdat de routine ontbreekt. In bijna alle leerboeken die de markt hebben gehaald, wordt slechts eventjes geroken aan de vaardigheden. De routine van vroeger wordt niet meer aangebracht...... Gebrek aan routine is een landelijk verschijnsel, het brengt alle wiskundedocenten tot wanhoop. Een ieder poogt op zijn manier (stencils oefenopgaven, oude leerboeken, dictaten enz.) een oplossing te vinden......

Moet ik nog meer klachten noemen? We kennen ze allemaal: ontbinding in factoren, het werken met breuken, machten en wortelvormen, het oplossen van vergelijkingen, het neerlaten van een loodlijn enz. kan men niet meer. In de statische mechanica behoort het werken met sin, cos en tan van een hoek niet meer tot de routine. Kortom, bij gebrek aan routine loopt alles vast. De professoren zullen ontdekken, dat hun studenten nu wel iets afweten van exponentiële functies en differentiaalvergelijkingen, maar voor wat betreft de lagere wiskunde allen afkomstig zijn uit onderontwikkelde gebieden. Hoe kan men beginnen aan breuksplitsing, als men nooit geleerd heeft breuken op te tellen? .... Het is nu eindelijk tijd in te zien, dat de oudere delen van de wiskunde onontbeerlijk zijn en dat ze didactisch juist de beste voorbereiding vormen tot de moderne wiskunde.
Ik acht het nieuwe bovenbouw- en nieuwe eindexamenprogramma gemakkelijker realiseerbaar als we het baseren op een traditionele onderbouw dan wanneer we, zoals nu, het baseren op een modern onderbouwprogramma. ....

De ellende van het moderne wiskunde onderwijs is de overtrokken waardering, die de moderne didactici hebben voor het "zelf ontdekken". In de praktijk blijkt steeds weer dat het mis gaat, omdat de stof òf te ingewikkeld is om ze bij eerste kennismaking te begrijpen, òf de stof is zo eenvoudig dat de behoefte om iets te ontdekken niet bestaat (de leerlingen zien het antwoord zo).
Naast het feit, dat de methode van zelfontdekking oneconomisch is en slechts langzaam leidt tot resultaten, veroorzaakt deze manier nog andere narigheid. Namelijk het intuïtieve gehannes in de onderbouw dat leidt tot het raden naar antwoorden en het zoeken van oplossingen voor puzzels.
We moeten onze leerlingen aanleren: een systematische aanpak van problemen,

oplossingsmethoden, het gebruiken en formuleren van logische volgorde, van gedachtenketens van oorzaak en gevolg.
En hoe gaat het met de methode van de moderne didactici? De vraagstukken in het begin van de hoofdstukken zijn zo eenvoudig, dat de leerlingen meestal de antwoorden "gewoon zien". Dit "gewoon zien" wordt aangemoedigd door het genoemde "intuïtieve gehannes". Er bestaat bij de leerlingen geen behoefte "een weg af te leggen" die tot het doel leidt. In de schriften staan dan ook uitsluitend rijtjes antwoorden. De leerling ziet immers niet de noodzaak van afleidingen. Pas veel later – bij ingewikkelder problemen – merkt hij, dat hij nooit heeft beseft, wat hij al die tijd heeft gedaan. Het formuleren van en het werken met logische gedachtenketens is hem toch nooit geleerd. ....

Nu een tweede narigheid van de moderne didactici. Na de behandeling van een stukje "nieuwe" leerstof dienen we door herhaalde controle zekerheid te verkrijgen, dat de leerlingen zich de behandelde leerstof hebben "eigen" gemaakt en moeten we hem er steeds weer op wijzen, dat elke controle dient om het geleerde voor hem te maken tot parate kennis, die zij moeten kunnen toepassen bij hun verdere wiskundestudie en later in de praktijk. Dit dient samen te gaan met het vastleggen en het uit-het-hoofdleren van (en leren hanteren van) begrippen, stellingen en formules (eventueel vaardigheden) die op het geleerde betrekking hebben.
Deze leerfase ontbreekt bij alle moderne didactici, in het bijzonder in de onderbouw-boeken. Dit feit komt vooral tot uiting als we wat verder komen in de wiskunde, want dan blijkt dat we met elk onderdeel weer helemaal opnieuw moeten beginnen, omdat elke parate kennis omtrent het vroeger geleerde ontbreekt.
We zullen de leerlingen weer moeten leren methodisch te werken. Dat elke stap verantwoord en begrepen moet worden om verder te kunnen gaan en later niet vast te lopen. Dus geen eerste rondes, die er op neerkomen dat de leerlingen leren raden naar antwoorden. Dat komt in feite neer op het toepassen van "slordige", onvolledige en foute oplossingsmethoden. ....

Ter illustratie van het ontbreken van parate kennis een voorval, dat zich kort geleden heeft voorgedaan in mijn vierde klas HAVO.
Ik had als huiswerk o.m. opgegeven: Gegeven de functie f gedefinieerd door

$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x$ (x element van $\mathbb{R}$). Voor welke waarden van x geldt:

a. $f'(x) = 0$ b. $f'(x) = -4$?

Bij het oplossen van deze vraagstukken stuit men op de vergelijkingen

$$x^2 + x - 6 = 0 \quad \text{en} \quad x^2 + x - 2 = 0.$$

Nu heb ik de gewoonte bijna alle huiswerk te laten maken op het bord, meestal tegelijkertijd door vier leerlingen naast elkaar. Wat er allemaal op het bord stond, durf ik bijna niet te vertellen. Eén leerling schreef zelfs $x(x+1) = 2$,

dus $S = \{-1; 2\}$. Een andere leerling vond met behulp van een formule $S = \{2\}$. Weer een andere leerling vond met behulp van kwadraatafsplitsing voor vraag b: $S = \{1\}$.
Toen mijn leerlingen klaar waren met hun kunststukken, liep ik naar het bord, veegde het bovenste gedeelte schoon en schreef op: $(x+3)(x-2) = 0$ en $(x+2)(x-1) = 0$.
Een reactie uit de klas: "Ja, nu is het gemakkelijker, maar dat moet je ook maar zien." Toen ik de klas vroeg: "Kunnen jullie dan niet ontbinden?" reageerde bijna de hele klas in koor: "Ja, mijnheer, maar u ziet dit zó, want het is uw vak. U hebt uw hele leven niets anders gedaan." ....

Waarom zouden we in onze brugklas het accent niet wat meer leggen op het maken van sommen? De pre-mammoettijd heeft toch bewezen dat dat heel goed uitvoerbaar is en het was destijds op de middelbare school heus geen sommencultuur ....

We moeten uit de impasse! Het kan!

D. van den Haak
H. van Neslaan 128
Noordwijk Binnen

Ter gelegenheid van de 70ste verjaardag van

prof. dr. Hans Freudenthal

zal op 17 september 1975 in Utrecht een feestelijk symposium gehouden worden. Er staan 4 sprekers op het programma, t.w.:

's ochtends
10.00–11.00 uur: prof. T. van Est (Amsterdam) over topologie
11.30–12.30 uur: prof. J. Tits (Parijs) over meetkunde

's middags
14.00–15.00 uur: prof. B. L. van der Waerden (Zürich) over geschiedenis van de algebra
15.30–16.30 uur: prof. Emma Castelnuovo (Rome) over onderwijs.

Op deze wijze hopen wij de belangrijkste onderwerpen aan de orde te brengen waarin de jarige actief is geïnteresseerd. De lezingen vinden plaats in de Blauwe zaal van het Transitorium I in het Universiteitscentrum De Uithof. Vanaf 09.30 uur zal koffie geserveerd worden.
Er is een gezamenlijke lunch gepland in de kantine van Transitorium II, waarvoor men zich vóór 15 augustus 1975 dient op te geven bij mej. Wil Jenner (tel. 030-531420). Kosten van de lunch ƒ6,50 per persoon, te storten op giro nr. 3345924 t.n.v. "Symposium september, Mathematisch Instituut, Utrecht".
Na de middaglezingen volgt een feestelijke receptie, waarop uiteraard de jarige iets zal worden aangeboden.
Alle belangstellenden worden hartelijk uitgenodigd deze dag geheel of gedeeltelijk bij te wonen.

Namens het voorbereidingscomité,
J. J. Duistermaat.

Rapportage vanuit de subcommissie bovenbouw van de C.M.L.W.

Zoals bekend is het wiskunde-onderwijs in de 4e, 5e en 6e klassen van het V.W.O. thans ondergebracht in twee vakken: wiskunde I en wiskunde II. Men ging er lange tijd van uit, dat voor de universitaire studie in de wiskunde en de aanverwante natuurwetenschappen alsmede voor de studie aan de Technische Hogescholen, wiskunde I èn II tot de normale vooropleiding zou behoren.
Later bleek deze gedachte niet realiseerbaar en thans wordt wiskunde II voor geen enkele universitaire studierichting als toelatingseis gesteld. Deze ontwikkeling alleen al werpt de vraag op, of de opzet van wiskunde I en II in de huidige situatie nog bevredigend is.
De problematiek van het wiskunde-onderwijs in de bovenbouw V.W.O. heeft zich toegespitst door een tweede ontwikkeling: het feit, dat de Sociale Faculteiten wiskunde I als toelatingseis voor de studies hebben gesteld. Deze ontwikkeling heeft problemen van tweeërlei aard gecreëerd.
Enerzijds ontstaan er op scholen onderwijskundige problemen bij het geven van onderwijs aan een groep leerlingen die in de wiskunde zeer ongelijk zijn geïnteresseerd en begaafd. Men vreest dat het niveau van het onderwijs onder deze omstandigheden zal dalen, anderzijds wordt men zich ook binnen de Sociale Faculteiten bewust van problemen, die de toelatingseis van wiskunde I met zich meebrengen.
Een nijpend probleem is dat van studenten met inadequate vooropleiding. Maar bovendien wordt de vraag opgeworpen of het huidige wiskunde I-pakket beantwoordt aan de eis een optimale voorbereiding te bieden voor een studie in één der Sociale Wetenschappen.
Bij een eerste onderzoek is de commissie opgevallen dat de wiskunde kennis die a.s. studenten in de studie in één der Sociale Wetenschappen eigenlijk zouden moeten beheersen betaat uit:

a. een gedeelte van de huidige wiskunde I leerstof
b. een gedeelte van de huidige wiskunde II leerstof
c. een aantal theorieën en technieken die noch in wiskunde I noch in wiskunde II gedoceerd worden

Aangezien de wiskundeleraren nu na enige jaren van experimenteren duidelijk

de voordelen van het nieuwe programma hebben leren ervaren, maar ook de nadelen ervan zullen hebben ontdekt, is het waarschijnlijk verstandig om gezamenlijk (eventueel via Euclides) te komen tot een geleidelijke hergroepering van de onderwerpen, die bij de wiskunde gedoceerd worden. Als eerste aanzet voor een herstructurering van het wiskunde onderwijs in de bovenbouw geeft de commissie de volgende voorstellen.
Wiskunde II als zelfstandig vak dient te worden afgeschaft. In de vierde klas zal, in plaats van de huidige wiskunde I en wiskunde II, één wiskunde-onderwijs van circa vier uur worden gegeven als rechtstreekse voortzetting van het onderwijs in de eerste drie leerjaren. Voor het onderwijs in de 5e en 6e klas doet de leerling de keuze uit twee in omvang gelijke, maar niet gelijkgerichte, wiskundevakken, te noemen wiskunde A en wiskunde B. Wiskunde A (4+4 lesuren) is bestemd voor degenen, die in hun universitaire studie de wiskunde hoofdzakelijk als instrument zullen gebruiken en er weinig onderwijs meer in zullen krijgen. Wiskunde B (4+4 lesuren) is voorbereidend onderwijs voor degenen die in hun universitaire studie aanzienlijk verdergaand onderwijs in de wiskunde zullen volgen. Bij elke indeling zullen er onvermijdelijk grensgevallen zijn. Voor deze studierichtingen zou men, nadat de programma's van wiskunde A en B zijn uitgekristalliseerd, de keuze nader kunnen bepalen.

De vierde klas

De leerstof die in de vierde klas behandeld moet worden zal de onvermijdelijk niet lege doorsnede van de leerstof wiskunde A en wiskunde B moeten bevatten. Eveneens zal getracht moeten worden de stof zo te presenteren dat een zinvolle afronding van het wiskunde onderwijs ontstaat voor diegenen die noch A noch B kiezen bij de voortzetting van hun studie in het V.W.O.
In deze klas dient in elk geval te worden gegeven:

a. een inleiding in de integraal- en differentiaalrekening.
b. een niet axiomatische inleiding in de stereometrie aan de hand van orthogonale coördinaten.
c. een inleiding in de beschrijvende statistiek en de kansrekening.

Eén en ander zal een voldoend verantwoorde eerste ronde, zonder diepgaande theoretische fundering en met de nadruk op techniek en toepassingen, moeten zijn.

Wiskunde A

Als uitgangspunt voor verdere discussie heeft de commissie het volgende concept voor de inhoud van wiskunde A opgesteld.

a. eenvoudige voortgezette differentiaal- en integraalrekening
b. eenvoudige lineaire algebra met de nadruk op matrixrekening
c. statistiek en waarschijnlijkheidsrekening
d. computerkunde

De presentatie van de stof dient met toepassingen nauw verweven te worden. Nadruk op vaardigheid in hanteren van technieken en niet op "begripsvorming van abstract mathematische structuren".

Enige "ingeklede wiskunde" zal beslist noodzakelijk zijn en een training hierin zal vermoedelijk al zeer veel tijd vergen. Het leren construeren van wiskundige modellen bij niet wiskundige problemen is hier van groot belang. Ook hierbij zal het onderwijs inzichtbevorderend moeten zijn.

Wiskunde B
Voorlopig stelt de commissie voor om hiervoor het huidige wiskunde I programma te handhaven met uitzondering van de statistiek en waarschijnlijkheidsrekening. De ruimte die ontstaat door het weglaten van statistiek en kansrekening zou bezet kunnen worden met een goede afronding van de analyse. Omtrent de inhoud van deze afronding zou de commissie graag voorstellen willen vernemen. Te denken zou zijn aan: functies van meerdere variabelen, lineaire algebra, numerieke wiskunde of toegepaste wiskunde. Al deze onderwerpen hebben hun aantrekkelijkheden en hun bezwaren, die nog verder gewikt en gewogen moeten worden.

Resumé
1. Wiskunde A moet een volwaardig vak worden, aantrekkelijk genoeg voor de studies in de faculteit der Sociale Wetenschappen.
2. Wiskunde B blijft het huidige wiskunde I zonder de statistiek maar met een zodanige afronding dat er een samenhangend geheel ontstaat.
3. De doorsnede van de leerstof van wiskunde A en wiskunde B moet in de vierde klas gegeven kunnen worden.
4. Een leerling moet in staat gesteld worden zowel wiskunde A als wiskunde B in zijn examenpakket op te nemen.

J. van Lint
(voorzitter commissie bovenbouw).

Toch maar y”?

DR. J.T. GROENMAN

Groningen

In Euclides 45-2 (1969-1970) ontmoette ik een artikel van J. van Lint over het gebruik van de tweede afgeleide bij differentiaalvergelijkingen. Ik stel voorop dat ik dit artikel van harte onderschrijf. Desondanks voel ik de aanvechting y'' *wel* te gebruiken. Vooral op een avondcollege is efficiëncy geboden. Ik licht dit toe aan onderstaand vraagstuk waarmee ik de zich reeds aftekenende vraagstukkencultuur mogelijk “verrijk”.
Gegeven is de differentiaalvergelijking:

$$x \cdot y' - y(x+2) = -x^3 + x^2 + k$$

a. Als aan deze vergelijking een kwadratische functie voldoet dan geldt $k = -2$.
b. Een functie voldoet aan de diferentiaalvergelijking en heeft een extreme waarde voor $x = 3$.
Is deze extreme waarde een maximum dan wel een minimum?
c. Los deze vergelijking op.

a. Substitutie van $y = ax^2 + bx + c$ geeft $a = 1$; $b = -1$; $c = 1$ en $k = -2$

b. $$y' = \frac{y(x+2) - x^3 + x^2 - 2}{x}$$

Dus is $y' = 0$ in de punten van de grafiek van

$$y = \frac{x^3 - x^2 + 2}{x+2} \qquad (x \neq 0)$$

Mocht de leerling met behulp van deze grafiek willen uitmaken in welke punten van het XOY-vlak y' positief dan wel negatief is, dan zal hij — naar ik hoop — deze gedachte spoedig opgeven.

Hij kan werken met y' in de punten $(3 + \delta; 4)$ en $(3 - \delta; 4)$
In het punt $(3; 4)$ is y' namelijk nul.

In $(3 + \delta; 4)$ is $y' = \dfrac{-\delta^3 - 8\delta^2 - 17\delta}{3 + \delta}$. Dit is voor positieve δ negatief.

In $(3 - \delta; 4)$ is $y' = \dfrac{\delta^3 - 8\delta^2 + 17\delta}{3 - \delta} = \dfrac{\delta(\delta^2 - 8\delta + 17)}{3 - \delta}$

Omdat de vorm tussen haken definiet positief is, is y' nu positief.
Het ziet er als volgt uit:

```
+ +   - -
----+----
    3
```

De conclusie is: een maximum.
En nu y'':

$$x \cdot y' - y(x + 2) = -x^3 + x^2 - 2 \qquad (1)$$

$$x \cdot y'' + y' - y'(x + 2) - y = -3x^2 + 2x \qquad (2)$$

$y' = 0; x = 3$. Uit (1) volgt $y = 4$ en dan uit (2): $y'' = -17/3$; y'' is negatief: maximum.
Men heeft nu zelfs een maat voor de "spitsheid". De winst kan worden uitgeteld.

c. Langs de gebruikelijke weg vindt men: $y = C \cdot x^2 \cdot e^x + x^2 - x + 1$

Ik ben het volkomen eens met van Lint als hij aan het slot van zijn artikel adviseert het gebruik van y'' toch maar te demonstreren. Wanneer geen inleidende vraag voorhanden is, heb ik de neiging mijn geweten te negéren en te werken met y''. De sommen uit de bekende "Opgaven voor wiskunde 1 en wiskunde 2" die een soortgelijke vraag als b. inhielden liepen vlot.

Dus toch maar y''? Ik dacht het vraagteken weg te laten, maar heb geen behoefte aan een uitroepteken.

Herexamen 1974 nr 2

$dy = 0 \quad y = 0 \vee \ln x = 0$
$\qquad\qquad x = 1$

$y' = \dfrac{y \cdot \ln x}{x} \quad y'' = \dfrac{x[y' \cdot \ln x + \frac{y}{x}] - y \ln x}{x^2}$

$y' = 0 \quad x = 1 \quad y = 3 \quad y'' = 3$ d.i. positief
$\Rightarrow$ minimum

Conclusie: differentiaalvergelijkingen uit het programma. Dressuur te goed mogelijk.

Korrel

De of een vergelijking van een vlak

Vele jaren heb ik gesproken van *de* vergelijking van een rechte lijn of van een vlak. De laatste tijd merk ik, dat de voorkeur van vele auteurs uitgaat naar de formulering: *een* vergelijking van een vlak. Het leek me een vanzelfsprekende vooruitgang. Voor hetzelfde vlak kunnen we als vergelijking bijv. opgeven:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$
$$x_1 = 1 - x_2 + 2x_3$$
$$-2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2 = 0$$

Deze veelheid schijnt het gebruik van het onbepaalde lidwoord te rechtvaardigen.
Toen ben ik eindelijk gaan denken.
Gevraagd: wat is de verzameling van de reële getallen x waarvoor $\sqrt{x} \neq 0$?
Dus: welke is de verzameling

$$\{x \varepsilon \mathbb{R} \mid \sqrt{x} \neq 0\}\ ?$$

Hieronder enkele juiste antwoorden:

$$\mathbb{R}^+$$
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$
$$<0, \rightarrow>$$

Is er iemand onder de lezers die in deze diversiteit van antwoorden aanleiding vindt voortaan te vragen: wat is *een* verzameling van de reële getallen x waarvoor $\sqrt{x} \neq 0$?
Neen. En waarom niet? Omdat alle hierboven geformuleerde verzamelingen gelijk zijn.
Nu *de* of *een* vergelijking van een vlak. Om te beginnen: wat wordt eigenlijk bedoeld met: een (de) vergelijking van vlak V is

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 1?$$

Zoals bekend:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 1\}$$

Nu is een relatie niets anders dan een verzameling. En de drie relaties

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 1\}$$
$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 1 - x_2 + 2x_3\}$$
$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2 = 0\}$$

zijn gelijke verzamelingen. Naar analogie van het voorgaande ligt het voor de hand hier ook het bepaalde lidwoord te gebruiken.
Het vlak V is dus gelijk aan *de* relatie

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 1\}$$

Parallel hiermee zou ik dan $x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$ *de* vergelijking van het vlak V willen noemen.

Desgewenst kan men nog iets principiëler op de kwestie ingaan. Wanneer gebruikt men het bepaalde lidwoord? Uitsluitend om ingeval een verzameling precies één element bevat, dat enige element aan te duiden. Men kan spreken van het reëele getal dat met 2 vermenigvuldigd 6 als produkt levert en van de lijn door punt P die loodrecht op l staat. Maar de uitdrukkingen: het getal dat met 0 vermenigvuldigd 0 (of 1) als produkt levert en de lijn door punt P die met l een hoek van 45° maakt, zijn zinloos.
Is er nu slechts één verzameling van reële getallen x waarvoor $\sqrt{x} \neq 0$ of zijn er meer en zijn deze alle aan elkaar gelijk?
Er is slechts één dergelijke verzameling, omdat we gelijke verzamelingen identificeren. Dat is geen subjectieve bezigheid, maar heeft logische grond. Als $V = W$, dan geldt: indien in een uitspraak V of W voorkomt, is deze uitspraak ekwivalent met elke uitspraak die eruit ontstaat door een erin voorkomende V (of W) door W (resp. V) te vervangen.[1] Tussen V en W bestaat dan geen logisch verschil met dien verstande, dat het onmogelijk is door middel van uitspraken V en W te onderscheiden. Er is dus slechts één verzameling die bestaat uit alle positieve reële getallen. En niet een heleboel dergelijke verzamelingen die krachtens een door mathematici opgestelde gelijkheidsdefinitie aan elkaar gelijk zijn. Immers ze zijn niet alleen gelijk, maar logisch identiek. En dan gebruiken we het bepaalde lidwoord.
De situatie bij de vlakken is dezelfde. Zelfs als iemand de switch van de relatie $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 1\}$ naar de vergelijking niet zonder meer zou willen maken en zou opmerken, dat de vergelijking $x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$ niet hetzelfde is als een relatie, omdat het een uitspraak met erin voorkomende vrije variabelen is (een 'open bewering' zeggen sommigen), dan nog blijven de argumenten van kracht. Immers de uitspraken

1) Strikt genomen moet men het taalsysteem waarbinnen deze vervangbaarheid geldt, precies omlijnen.

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$
$$x_1 = 1 - x_2 + 2x_3$$
$$-2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2 = 0$$

zijn ekwivalent. Dit houdt in dat vervanging van een van deze uitspraken door een van de andere binnen een meer omvangrijke uitspraak of in een betoog de geldigheid van deze uitspraak of de juistheid van dit betoog niet aantast. Dus weer zijn deze uitspraken logisch identiek. En hiermee is het gebruik van het bepaalde lidwoord dwingend geworden.

P.G.J. Vredenduin

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Uit de bestuursvergaderingen van 29 januari en 5 maart 1975.

1. Raad vän Vakgroepen.
   De door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren voorgestelde wijzigingen van de ontwerpstatuten zijn door de RvV slechts gedeeltelijk geaccepteerd.
   In het belang van contacten met andere vakgroepen zal het lidmaatschap van de RvV voorlopig gecontinueerd worden.
2. Belgische Vereniging van Wiskundeleraars.
   Deze vereniging is gesplitst in een Nederlands- en een Franstalige vereniging.
   Naar een nauwere samenwerking met de Nederlandstalige vereniging zal worden gestreefd.
3. Eindexamens.
   Jaarlijks wordt door de vereniging een voorstel voor de samenstelling van adviescommissies en normencommissies aan de inspectie gezonden alsmede een voorstel voor auteurs van examenopgaven.
4. Jaarvergadering.
   Deze wordt voorlopig vastgesteld op 1 november. Het thema zal zijn: 'Vaardigheden'.
5. Regionale werkgroepen.
   Voortzetting hiervan zal worden gestimuleerd.
6. Examenbijeenkomsten.
   Op 28 mei worden 16 mavo-bijeenkomsten georganiseerd.
7. Opgavenbundel voor het havo.
   Het contract met Wolters-Noordhoff wordt getekend.
8. Mathematisch Centrum.
   De avondcursussen voor leraren kunnen niet worden voortgezet wegens het ontbreken van subsidie. Hierover zal een brief aan de afdeling her- en bijscholing van het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen worden gericht.
9. Dr. Th. J. Korthagen zal namens de vereniging zitting nemen in de adviescommissie vacantiecursussen van het Mathematisch Centrum.

Euler — Möbius

Dr. G. BOSTEELS

Berchem

1 In de rekenkunde bestaan er een paar functies, die grote diensten bewijzen in de getaltheorie en die ook in de nieuwere opvattingen van de wiskunde haar bestaansrecht verzekerd zien.
Sommige van deze functies werden gekenmerkt door zeer eenvoudige berekeningen, die buiten het alledaagse cijferwerk vallen en nochtans degelijke oefeningen zijn welke een niet te onderschatten concentratie vereisten.

We maken kennis met de Eulerfunctie, waarover we onlangs nog in Wiskunde-Post enig commentaar verschaften.[1]
Is $n \in \mathbb{N}$, dan heet $\varphi(n)$ de Eulerfunctie; ze stelt het aantal elementen van $\mathbb{N}$ voor, die onderling ondeelbaar zijn met n.
Als $n > 1$, zijn 0 en n niet onderling ondeelbaar met n. $\varphi(n)$ is dus ook gelijk aan het aantal elementen uit de verzameling $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ die onderling ondeelbaar zijn met n.
Uit deze definitie volgt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\varphi(n)$	12	6	8	8	16	6	18	8	12	10	22	8

n	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$\varphi(n)$	20	12	18	12	28	8	30	16	20	16	24	12

n	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
$\varphi(n)$	36	18	24	16	40	12	42	20	24	22	46	16

en verder bijvoorbeeld nog $\varphi(1\,001) = 720$.
We zoeken een middel om $\varphi(n)$ te berekenen.
Daartoe onderzoeken we eerst twee eigenschappen.

2. *Eerste eigenschap*
Als $r, m, n \in \mathbb{N}$, dan is r onderling ondeelbaar met mn als en slechts als r onderling ondeelbaar is met m en tevens met n.
Bewijs: onderstel ggd $(r, mn) = 1$; vermits de grootste gemene deler van r en m een deler is van de grootste gemene deler van r en mn en de grootste gemene deler van r en n een deler is van de grootste gemene deler van r en mn volgt daaruit dat

$$\text{ggd}(r, m) = 1 \text{ en } \text{ggd}(r, n) = 1$$

Onderstel nu dat ggd$(r, m) = 1$ en ggd$(r, n) = 1$. Zou nu ggd$(r, mn) \neq 1$ zijn, dan bestond er een priemgetal p dat r en mn zou delen. Dan zou p een deler zijn van r en m, of een deler zijn van r en n. Dit zou dan betekenen dat

$$\text{ggd}(r, m) = 1 \text{ of } \text{ggd}(r, n) = 1.$$

We besluiten

$$(\text{ggd}(r, m) = 1 \wedge \text{ggd}(r, n) = 1) \Leftrightarrow \text{ggd}(r, mn) = 1$$

waarmee de eigenschap volkomen bewezen is.

3 *Tweede eigenschap*
Als m en n onderling ondeelbare getallen uit $\mathbb{N}$ zijn, dan is

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\,\varphi(n)$$

Bewijs: vermits $\varphi(1) = 1$ is de eigenschap triviaal als $m = 1$ of $n = 1$. Onderstel dus rustig $m > 1$ en $n > 1$. Het getal $\varphi(mn)$ is dan het aantal natuurlijke getallen uit de verzameling.

$$\{0, 1, 2, \ldots, mn - 1\} \qquad (1)$$

die onderling ondeelbaar zijn met mn.
Deze mn natuurlijke getallen kunnen op juist één manier voorgesteld worden in de gedaante

$$mq + r \text{ met } 0 \leqslant q \leqslant n - 1 \text{ en } 0 \leqslant r \leqslant m - 1.$$

Daar nu voor $a, b, k \in \mathbb{N}$

$$\text{ggd}(a + kb, b) = \text{ggd}(a, b).$$

Vermits nu gegeven is dat ggd$(m, n) = 1$, zal dus ook ggd$(mq + r, n) = 1$ en bijgevolg zal ggd$(mq + r, m) = 1$ als en slechts als ggd$(r, m) = 1$. Uit de definitie van $\varphi(m)$ volgt dat er $\varphi(m)$ waarden van r zijn waarvoor ggd$(r, m) = 1$. Noem deze waarden

$$r_1, r_2, \ldots, r_k \qquad (k = \varphi(m))$$

en bekijk de n verschillende natuurlijke getallen

$$x_q = mq + r \text{ met } q \in \{0, 1, \ldots, n - 1\} \tag{2}$$

die ieder onderling ondeelbaar zijn met m. Geen twee van deze getallen geven dezelfde rest bij deling door n. Zou inderdaad x_q dezelfde rest opleveren als $x_{q'}$ $(q \neq q')$, dan zou n het verschil $q - q'$ delen en uit (2) leiden we af

$$x_q - x_{q'} = m(q - q').$$

Gelet op ggd$(m, n) = 1$, zou dan n een deler zijn van $q - q'$. Maar

$$0 < |q - q'| \leqslant n - 1$$

en daaruit volgt dan een contradictie. Hiermee weten we dat x_q en $x_{q'}$ bij deling door n dezelfde rest opleveren.
De stelling van Euler: voor alle a en $b \in \mathbb{N}$ $(b \neq 0)$ bestaan er elementen q en $r \in \mathbb{N}$, zodanig dat

$$a = bq + r \text{ met } 0 \leqslant r < b,$$

en de getallen q en r zijn enig.
Deze stelling toont aan dat de n getallen uit (2), afgezien van de volgorde, in de gedaante

$$nk_s + s \text{ met } s \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}, k \in \mathbb{N}$$

kunnen geschreven worden, waarbij we gebruik maken van de voornoemde eigenschap

$$\text{ggd}(nk_s + s, n) = 1 \Rightarrow \text{ggd}(s, n) = 1$$

Er zijn dus werkelijk $\varphi(n)$ natuurlijke getallen in de verzameling (2), die onderling ondeelbaar zijn met n. Er zijn dus ook $\varphi(n)$ gehele getallen in (1) met rest r_1 ten opzichte van m, die onderling ondeelbaar zijn met m en met n en dus ook (gelet op eigenschap I) met mn.
Passen we nu de eigenschap herhaaldelijk toe (voor elk van de andere gehele getallen $r_2, r_3, \ldots, r_{n-1}$ in de plaats van r_1 dan volgt hieruit tenslotte dat er in de verzameling (1) precies $\varphi(m)\,\varphi(n)$ getallen zijn, die onderling ondeelbaar zijn

met *mn*. De eigenschap is hiermee bewezen.

Voorbeelden:

$$\varphi(30) = \varphi(5)\,\varphi(6) = 8$$

want ggd(5, 6) = 1.

$$\varphi(1001) = \varphi(7.11.13) = 6.10.12 = 720.$$

want 7, 11 en 13 zijn paarsgewijze onderling ondeelbaar.

4 *Derde eigenschap*
Als $n > 1$ en de ontbinding van n in priemfactoren is

$$n = p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$$

dan is

$$\varphi(n) = n\,(1 - \frac{1}{p_1})\,(1 - \frac{1}{p_2}) \ldots (1 - \frac{1}{p_r})$$

Bewijs: uit de voorgaande eigenschap weten we dat

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \,.\, \varphi(p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r})$$

en door het $(r - 2)$-maal toepassen van de eigenschap komen we tot de volgende betrekking

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1})\,\varphi(p_2^{\alpha_2}) \ldots \varphi(p_r^{\alpha_r})$$

Neem nu, onder al de genoemde priemgetallen, het getal p_i en onderzoek $\varphi(p_i^{\alpha_i})$. De natuurlijke getallen in de verzameling $\{0, 1, 2, \ldots, p_i\}$, die deelbaar zijn door p_i zitten in de verzameling

$$\{1.p_i, 2.p_i, 3.p_i, \ldots, p_i^{\alpha_i - 1}\, p_i\}$$

Er zijn dus $p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}$ natuurlijke getallen, die onderling ondeelbaar zijn met $p_i^{\alpha_i}$, zodat

$$\varphi(p_i^{\alpha_i}) = p_i^{\alpha_i}\,(1 - \frac{1}{p_i})$$

Het gevraagde resultaat kan hieruit nu eenvoudig worden afgeleid.
In verkorte notaties (pi-notatie voor produkten) schrijft men voor de uitkomst ook wel

$$\varphi(n) = n\pi\,(1 - \frac{1}{p})$$

waarbij het produkt uitgebreid wordt tot alle verschillende priemfactoren p, die n delen.
Voorbeeld: $540 = 2^2\, 3^3\, 5$ en

$$\varphi(540) = 540\,(1 - \tfrac{1}{2})\,(1 - \tfrac{1}{3})\,(1 - \tfrac{1}{5}) = 144$$

5 *Vierde eigenschap*
De som van al de Eulerfuncties van d die n delen, is gelijk aan n.
Bewijs: neem de verzameling $V = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Als d een deler van n is, dan zijn er n/d natuurlijke getallen die deelbaar zijn door d, en wel de getallen

$$1 \,.\, d, 2 \,.\, d, \ldots, \frac{n}{d} \,.\, d \tag{3}$$

Is k een willekeurig natuurlijk getal, dan is ggd$(kd, n) = d$ als en slechts als ggd$(k, n/d) = 1$. Nemen we $k = 1, 2, \ldots, n/d$, dan zijn er $\varphi\,(n/d)$ natuurlijke getallen in (3) en dus ook in V, die met n de ggd d hebben. Deze eigenschap geldt voor elke deler van n. Vermits nu elk natuurlijk getal uit V een deler van n als grootste gemene deler met n bezit, zal

$$\sum_{d|n} \varphi\,(\frac{n}{d}) = n$$

Nu is $d \cdot \frac{n}{d} = n$ en d is een deler van n als en slechts als n/d een deler van n is. Bijgevolg zal

$$\sum_{d|n} \varphi\,(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \varphi\,(d)$$

wat de eigenschap bewijst.
Voorbeelden: Neem $n = 18$. De delers van 18 zijn: 1, 2, 3, 6, 9, 18 en $\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(6) + \varphi(9) + \varphi(18) = 1 + 1 + 2 + 2 + 6 + 6 = 18$ Neem $n = 17$. De delers van 17 zijn 1 en 17 en $\varphi(1) + \varphi(17) = 1 + 16 = 17$.
Uit de derde eigenschap merken we op, dat voor elk priemgetal geldt:

$$\varphi(p) = p(1 - \frac{1}{p}) = p\,\frac{p-1}{p} = p - 1$$

Voorbeelden:

$$\varphi\,(37) = 36, \varphi\,(97) = 96$$

Voor wie graag zijn rekenvaardigheid test volgen hier, op het rijtje af, de waarden van $\varphi(n)$ voor n vertrekkende van 49 tot en met 100:

42-20-32-24-52-18-40-24-36-28-58-16-60-30-36-32-48-20-66-32-44-24-70-24-72-36-40-36-40-36-60-24-78-32-54-40-82-24-64-42-56-40-88-24-72-44-60-46-72-32-96-42-60-40.

De afbeelding van IN in $\varphi(n)$ is ook wel leuk, vooral dan voor een groepswerk van leerlingen. De relatie 'heeft dezelfde $\varphi(n)$-waarde' is vanzelfsprekend een equivalentierelatie. Voor de 100 waarden, die we hebben opgetekend zijn de equivalentieklassen: {1, 2}, {3, 4, 6}, {5, 8, 10, 12}, {7, 9, 14, 18}, {15, 16, 20, 24, 30}, {11, 22}, {13, 21, 26, 28, 36, 42, 54}, {17, 32, 34, 40, 48, 60}, {19, 27, 38, 54}, {25, 33, 44, 50, 54, 66}, {23, 46}, {35, 39, 45, 52, 56, 70, 72, 78, 84}, {29, 58}, {31, 62}, {51, 64, 68, 80, 96}, {37, 57, 63, 74, 76}, {41, 55, 75, 82, 88, 100}, {43, 49, 86, 98}, {69, 92}, {47, 94}, {65}, {51}, {53}, {81}, {87, 59}, {61, 77, 93, 99}, {32, 85}, {67}, {71}, {73, 91, 95}, {79}, {83}, {89}, {91}, {97}.
Bij het controleren van dit resultaat merken we op dat de waarden 14, 26, 34, 38, 62, 68, 74, 76, 80, 84, 86, 92, 94, 98 voor $\varphi(n)$ niet voorkomen. Voor de eerste waarden is dit vrijwel verwonderlijk, voor de hogere waarden echter niet, omdat we ons beperkt hebben tot $n = 100$.
Oefenmateriaal:
1. Bewijs dat, als $n = 2^r$ $(r \geqslant 1)$, dan $\varphi(n) = n/2$.
2. Bewijs dat $\varphi(3n) = \varphi(4n) = \varphi(6n)$, als ggd$(6, n) = 1$.
3. Bewijs dat $\varphi(n) = \varphi(2n)$.
4. Bewijs dat $\varphi(p^2) = p(p-1)$, als p priem is.

6 *Arithmetische functies*
Neemt een functie f voor alle $n \in$ IN waarden uit IN aan, dan heet ze een arithmetische (ook: rekenkundige) functie.
Voorbeelden:

$$\varphi(n), n^2, n^3, n!\ .$$

Tegenvoorbeeld:

$$\sqrt{n}.$$

In de getaltheorie treedt de zgn. priemgetalstelling op:
Als $f(x)$ het aantal priemgetallen, kleiner is dan $x \in \mathbb{R}^+$ is, dan is

$$\lim f(x)\ \frac{\ln x}{x} = 1$$

als x onbeperkt stijgt. Hierin stelt *ln* de neperiaanse logaritme voor. Het bewijs van

deze stelling is vrij ingewikkeld.
Bij dit bewijs maakt men gebruik van de zogenaamde lambdafunctie (Λ = Griekse hoofdletter lambda), die als volgt gedefinieerd wordt:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, \text{ als } n = p^m \\ \text{met } p \text{ priemgetal en } m \in \mathbb{N} \\ 0 \text{ in alle andere gevallen.} \end{cases}$$

Voorbeelden:

$$\Lambda(25) = \ln 5 = 1.60944$$
$$\Lambda(26) = 0$$

en Λ is geen rekenkundige functie.
Een rekenkundige functie heet multiplicatief, als voor alle $m, n \in \mathbb{N}$, met ggd$(m, n) = 1$ geldt

$$f(mn) = f(m)\,f(n) \qquad (4)$$

Geldt (4) voor alle $m, n \in \mathbb{N}$, zonder enige beperking, dan heet de functie totaal multiplicatief.
Voorbeelden:

$$f(n) = n^2$$

is totaal multiplicatief, want

$$f(mn) = m^2n^2 \text{ en } f(m)\,f(n) = m^2n^2$$
$$f(n) = n!$$

is niet multiplicatief, want

$$f(2.3) = 6! = 720 \text{ en } f(2)\,f(3) = 2!\ \ 3! = 12$$

7 *Eigenschap*
Als f een multiplicatieve rekenkundige functie is, dan is de functie F gedefinieerd door

$$F(n) = \Sigma f(d)$$

eveneens multiplicatief, als de som uitgebreid wordt over al de delers d van n.
Bewijs: onderstel ggd$(m, n) = 1$. Als $d_1 | m$ en $d_2 | n$, dan is ggd$(d_1, d_2) = 1$. Doorlopen d_1 en d_2 nu al de delers van m en n, dan doorloopt $d_1.d_2$ al de delers van mn. Daaruit volgt:

$$F(mn) = \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} f(d_1, d_2)$$

$$\sum_{d_1|m} f(d_1) \,.\, \sum_{d_2|n} f(d_2) = F(m) \,.\, F(n)$$

Voorbeeld: ggd (4, 15) = 1

$$\sum_{d|4} \varphi(4) = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(4) = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$\sum_{d|15} \varphi(15) = \varphi(1) + \varphi(3) + \varphi(5) + \varphi(15) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

en

$$\varphi(60) = 60 = 4 \times 15,$$

terwijl

$$\sum_{d|60} \varphi(60) = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(10) + \varphi(12) + \varphi(15) +$$

$$\varphi(20) + \varphi(30) + \varphi(60) = 1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 2 + 4 + 4 + 8 + 8 + 8 + 16 = 60$$

8 *Möbius (1790-1868)*

De Möbiusfunctie $\mu(n)$ is een rekenkundige functie, die voor alle $n \in \mathbb{N}$ als volgt gedefinieerd wordt

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 1 \\ 0 & \text{als } n\ (> 1) \text{ deelbaar is door } p^2 \text{ met } p \text{ priemgetal} \\ (-1)^r & \text{als } n \text{ een produkt is van een eindig aantal onderling verschil-} \\ & \text{lende priemgetallen: } n = p_1 p_2 \ldots p_r \end{cases}$$

Voorbeelden:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(n)$	1	−1	−1	0	−1	1	−1	0	0	1

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\mu(n)$	−1	0	−1	1	1	0	−1	0	−1	0

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\mu(n)$	1	+1	−1	0	0	1	0	0	−1	−1

n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$\mu(n)$	−1	0	1	1	0	0	−1	1	1	0

n	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
$\mu(n)$	−1	−1	−1	0	0	1	−1	0	0	0

Oefening: beeld $\mathbb{N}$ af in de verzameling $\{-1, 0, 1\}$.

Eigenschap:

$$M(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 \text{ als } n = 1 \\ 0 \text{ als } n > 1. \end{cases}$$

Bewijs: gelet op de definitie uit nr. 6 is $M(n)$ een multiplicatieve functie en $M(1) = \mu(1) = 1$.

Is

$$n > 1 \text{ en } n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i} \tag{5}$$

de ontbinding in priemfactoren van n, dan is

$$M(n) = \prod_{i=1}^{r} M(p_i^{\alpha_i}) \text{ en}$$

$$M(p_i^{\alpha_i}) = \sum_{d|p_i^{\alpha_i}} \mu(d)$$

$$= \mu(1) + \mu(p_i) + \mu(p_i^2) + \ldots + \mu(p_i^{\alpha_i})$$

$$= 1 - 1 + 0 + \ldots + 0 = 0$$

wat de stelling bewijst.

De Möbiusfunctie speelt een rol bij het bewijs van de zogenaamde inversieformule, die zijn naam draagt.

Eigenschap:

Als f een rekenkundige functie is en

$$F(n) = \Sigma f(d)$$

dan is

$$f(n) = \Sigma\mu\,(n/d)\,F(d) = \Sigma\,\mu\,(d)\,F(n/d) \tag{6}$$

waarbij de som weer uitgebreid wordt over al de delers d van n.

Bewijs: doorloopt d alle delers van n, dan geldt dit ook voor n/d en beide sommen uit de laatste formule (6) zijn gelijk.

$$\Sigma\, \mu(d) \,.\, F(n/d) = \sum_{d|n} \mu(d) \,.\, \sum_{d_1|\frac{n}{d}} f(d_1)$$

$$= \sum_{dd_1|n} \mu(d) \,.\, f(d_1) \quad \text{(multiplicatief)} \qquad (7)$$

$$= \sum_{d_1|n} f(d) \sum_{d|\frac{n}{d_1}} \mu(d) = f(n)$$

want wegens voorgaande eigenschap is de laatste factor uit (7) 0 of 1 als $n/d_1 = 1$ is, dit is als $d_1 = n$ en $d = 1$.

Voorbeeld: uit (6) volgt

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \,.\, \frac{n}{d} \qquad (8)$$

Onderstel n ontbonden in zijn priemfactoren (5). Uit de definitie van $\mu(d)$ en (8) volgt dan

$$\varphi(n) = n - \Sigma_1 \frac{n}{p_i} + \Sigma_2 \frac{n}{p_i p_j} - \ldots$$

$$= n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_1}) \ldots (1 - \frac{1}{p_r})$$

waarbij in Σ_1 de som genomen wordt voor $1 \leqslant i < r$ en in Σ_2 voor $1 \leqslant i < j \leqslant r$. Uit deze laatste stelling kunnen we de formule $n = \Sigma\, \varphi$ (d) uit de formule voor $\varphi(n)$ afleiden.

Men kan trouwens zonder veel moeite de omgekeerde stelling bewijzen. Het is ten stelligste aan te raden de formule even te toetsen, bijvoorbeeld voor $n = 18$.

Met 12 à 13 jarige leerlingen werd heel wat gecijferd; de stellingen kunnen liefst later bewezen worden. Het cijferwerk scheen me in deze mate interessant dat allerlei begrippen (onderling ondeelbaar zijn, priemgetallen, machten van -1, ontbinden in priemgetallen, opsporen van delers van een getal) herhaald worden; waar deze begrippen niet onderhouden worden gaan ze toch helemaal verloren.

1. Wiskunde-Post, mei 1973.

Op weg naar een didaktiek van de wiskunde

JOH. H. WANSINK
Arnhem

Naar aanleiding van
Prof. Dr. Hans Freudenthal, *Mathematik als pädagogische Aufgabe**,
Ernst Klett Verlag Stuttgart, 1973 en 1974.

1. Deze uitgave betekent een bundeling van een aantal didaktische opvattingen van de auteur, opvattingen waarvan de meeste gedurende de laatste kwart eeuw reeds eerder in diverse tijdschriften en rapporten werden gepubliceerd. Deze bundeling heeft geleid tot een ordening van de eerder uitgesproken ideeën, zonder dat hierbij de bedoeling heeft voorgezeten de verzameling van opstellen tot een systematische didaktiek van de wiskunde te doen uitgroeien; wel tot een '*Philosophie der mathematischen Erziehung*' (10).

2. Voor een eerste oriëntatie inzake de inhoud van de beide delen en de struktuur van de bundel sommen we hier de titels van de opvolgende hoofdstukken op en geven daarbij tussen haakjes telkens het aantal bladzijden aan dat voor de diverse onderwerpen nog al sterk uiteen loopt.

1 Die mathematische Tradition (14).
2 Mathematik heute (3).
3 Die Tradition der Erziehung (12).
4 Zweck und Ziel des Mathematikunterrichts (30).
5 Die Sokratische Methode (9).
6 Die Nacherfindung (19).
7 Mathematisierendes Ordnen des Feldes (14).
8 Die Strenge (7).
9 Der Unterricht (6).
10 Der Mathematiklehrer (7).
11 Der Zahlbegriff; die objektiven Zugänge (61).
12 Die Entwicklung des Zahlbegriffs; von der anschaulichen Methoden zur Algorithmisierung und Rationalisierung (36).
13 Die Entwicklung des Zahlbegriffs; die algebraische Methode (21).
14 Die Entwicklung des Zahlbegriffs; vom algebraischen Prinzip zur Ordnung der Algebra im Groszen (18).
15 Mengen und Funktionen (60).
16 Der Fall der Geometrie (95).

* De Engelse uitgave van dit boek werd door Dr. P. G. J. Vredenduin besproken in Euclides 49–2, oktober 1973. De redactie achtte de bespreking door Dr. Joh. H. Wansink van de Duitse uitgave belangrijk genoeg om deze naast de andere op te nemen.

17 Analyse (56).
18 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (31).
19 Logik (42).

Voorts zijn er twee appendices, één op deel I over de relaties van de onderzoekingen uit de school van Piaget tot de wiskunde, en één op deel II met een lijst van 43 verhandelingen van de auteur over onderwerpen uit de didaktiek van de wiskunde.
Bovenstaande opsomming moge reeds een indruk geven van de buitengewoon rijke inhoud van de beide delen.

3. De verschijning van *Mathematik als pädagogische Aufgabe* van de hand van een internationaal gewaardeerd wiskundige met een uitgesproken belangstelling voor onderwijsproblemen roept onwillekeurig de herinnering wakker aan de *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus* van Felix Klein (1849–1926), een werk uit 1908 dat van grote betekenis is geweest voor de in en buiten Duitsland nagestreefde hervormingen van ons wiskundeonderwijs in de eerste helft van deze eeuw. Maar, terwijl het bij de Klein'se Reform allereerst ging om invoering van nieuwe leerstof bepleit Freudenthal andere methoden, een andere werkvorm van de leerlingen. Hij signaleert, dat ook in ons land programmaherzieningen steeds beperkt bleven tot leerstofproblemen, terwijl systematisch methoden van leren en instrueren buiten beschouwing bleven. Nu revolutionaire herzieningen van de jongste tijd het onderwijs gaan overspoelen en hier en daar voor de kwaliteit van het onderwijs een ernstige bedreiging gaan vormen, luidt Freudenthal de noodklok en zet waarschuwingsborden bij gevaarlijke plekken in de onderwijspraktijk.

4. Duidelijk distantieert Freudenthal zich daarbij van a-pedagogische en antipedagogische opvattingen van de wiskundigen, die op universiteit en school tot in het midden van deze eeuw de toon probeerden aan te geven. Trouwens, ook nu nog hebben die opvattingen niet geheel afgedaan en blijven er stemmen opgaan van wiskundigen die, wars van pedagogisch en psychologisch getheoretiseer, de overtuiging huldigen dat alle vragen van ons wiskundeonderwijs zich vanuit de vakwetenschap der wiskunde zelf laten beantwoorden.
Hoe laat zich Freudenthal's standpunt inzake de plaats die aan pedagogische principes in ons wiskunde-onderwijs toekomt kort formuleren? Zijn opvattingen komen over alle hoofdstukken van de bundel verspreid aan de orde.
Principieel is Freudenthal's denkpsychologisch gefundeerde overtuiging, dat in het leerproces alle passief luisteren uit den boze is en dat hiervoor een werkvorm in de plaats dient te komen, waarbij de leerling door eigen activiteit de stof leert beheersen. Door andere activiteiten dan door luisteren alleen. Op de voorgrond wordt hierbij gesteld de methode van de '*Nacherfindung*', die van de herontdekking.
Freudenthal laat zijn voorkeur voor deze methode niet in eerste instantie bepalen door het antwoord op de vraag welke methode tot de beste onderwijsresultaten zal leiden. Hij erkent de mogelijkheid dat het oordeel over de effectiviteit van de werkmethode voor het ene stuk leerstof wel eens anders zou kunnen uitvallen dan voor het andere.

Hij schrijft:
'Die didaktischen Konsequenzen interessieren mich im Augenblick nicht. Es handelt sich nicht mehr darum, ob die autoritäre Methode im Lehrprozess schlecht oder falsch oder unzweckmässig sei. Sie ist einfach unmöglich, sie ist unverträglich mit der modernen Gesellschaft. Gegenüber der Emanzipation der Jugend lässt sich die Autorität der Älteren im Lehrprozess nicht aufrechterhalten. Unsere Kulturgüter sind viel zu gefährlich, als dass wir sie der Jugend fix und fertig präsentieren können'.
En na een citaat uit Goethe: 'Was du ererbt von deinen Vätern hast, erwirb es um es zu besitzen' formuleert Freudenthal:

> 'Besitz ist nicht mehr ein Zustand, es ist der stetige Prozess des in Besitz Nehmens. Erziehen heisst: diesen Prozess steuern. Nicht: Hände und Hirn mit gutgemeinten Gaben füllen' (60).

De auteur tracht de relatieve waarde die de socratische methode voor ons onderwijs had en heeft in het licht te stellen. 'Die sokratische Methode ist auch heute noch das Fundament der Didaktik, oder vielmehr sie sollte es sein – viele unserer Zeitgenossen sind noch Vorsokratiker' (97). Hij geeft aan deze methode de naam '*Dialektik* oder,' aldus Freudenthal, 'wie ich lieber sagen würde, die Didaktik des Gedankenexperiments' (98). Volgens zijn opvattingen is echter het boek de grote vijand van de sokratische methode (104).
Freudenthal's voorkeur gaat uit naar de methode van de Nacherfindung, van de herontdekking. Tegenover de grondregel uit de didaktiek van Comenius:

> 'Am besten lehrt man eine Tätigkeit, indem man sie vorführt'
> stelt hij de zijne:
> 'Am besten lernt man eine Tätigkeit, indem man sie ausführt'.

Hij is van oordeel, dat het principe van de methode van de herontdekking tegenwoordig als didaktisch principe algemeen wordt aanvaard (116). Voorzover dit een bedreiging van de dialektische methode zou kunnen betekenen, zet ik hierbij een vraagteken.

5. De prioriteit door Freudenthal voor ons wiskunde-onderwijs toegekend aan een pedagogische fundering heeft consequenties voor de leraarsopleiding in ons vak en betekent daardoor een breuk met opvattingen uit een nog jong verleden, waarbij voor het leraarsschap alleen zuiver wiskundige vakvorming van belang werd geacht.
Dit gold voor alle niveaus van ons onderwijs; voor de studie voor de akte wiskunde l.o., voor de middelbare akten en voor de academische studie werd alleen kennis van de wiskunde zelf (en dan voor wat de aktenstudie betreft met het accent op het oplossen van vraagstukken) van belang geacht. Karakteristiek voor opvattingen die we nu wel als achterhaald mogen beschouwen is de volgende uitspraak van een drietal hoogleraren in de wiskunde uit 1930. Ze waren van oordeel 'dat mocht men (toch) overgaan tot het stellen van de eis van pedagogiek en didaktiek op het doctoraal examen, het wetenschappelijk peil van de gemiddelde leraar zal dalen en de scholen voor m.o. en v.h.o. dientengevolge het enige wezenlijke kenmerk zullen verliezen dat hen van u.l.o.-scholen onderscheidt'.
Ten opzichte van de didaktiek leefde men in ons land voor wat het voortgezet onderwijs betreft tot in het midden van deze eeuw nog in de prehistorie.

Freudenthal's werk draagt er toe bij het einde van deze periode te markeren. Hoe een didaktiek van de wiskunde in de geest van Freudenthal er in feite uit zal komen te zien kon in zijn onderwijsfilosofie nog niet tot zijn recht komen. Aan het aandeel dat de pedagogiek als wetenschap zal toekomen in de toekomstige leraarsopleiding schenkt Freudenthal nog maar weinig aandacht. 'Es versteht sich von selber dass man auch das Unterrichten lernt, indem man unterrichtet' (156). Wat wordt hierbij de rol van pedagogiek en algemene didaktiek die uit die opleiding niet meer weg te denken zullen zijn?
Ik heb de indruk dat de didaktiek van de wiskunde in de geest van Freudenthal een vrij autonome ontwikkeling te zien zal geven. Wiskundige vakkennis en lespraktijk blijven centraal staan. Theoretische kennis op het gebied van pedagogiek en algemene didaktiek zal nimmer de fundamentele vakkennis mogen vervangen. Trouwens, Freudenthal huldigt de overtuiging, dat naast de moedertaal de wiskunde het beste uitgangspunt vormt naar een algemene didaktiek.

6 Freudenthal wijst in zijn filosofie van de wiskundige scholing op de enorme uitbreiding die het wetenschappelijk wiskundig onderzoek in de laatste halve eeuw ons heeft laten zien. Er zijn zoveel nieuwe gebieden ontsloten, dat hij de wiskunde uit het eerste kwart van deze eeuw nog kan kwalificeren als te behoren tot het 'stenen tijdperk'. De groei van de wiskunde als wetenschap naast de groeiende behoefte aan vorming van de leraar op pedagogisch, sociologisch, psychologisch en didaktisch gebied heeft enorme problemen geschapen voor de te lang verwaarloosde vakopleiding van de wiskundeleraar.
Zowel bij de leraarsopleiding zelf als bij de steeds onontbeerlijker wordende nascholing kan Freudenthal's werk grote diensten bewijzen in het bijzonder bij de terreinverkenning van de grensgebieden tussen de schoolwiskunde en de wiskunde van het tertiair onderwijs. De schoolwiskunde wordt in al zijn onderdelen (zie de onder 2 vermelde inhoudsopgave) aan een kritische analyse onderworpen. De weg wordt gewezen naar een effectieve behandeling van de leerstof bij eerste kennismaking en voor de daarop volgende fasen in het leerproces. Nergens wordt een poging gedaan tot een quasi-wetenschappelijke behandeling van de wiskunde op onze scholen door overijld binnenhalen van enig deductief systeem van behandeling te propageren (integendeel!). De grensverkenning tussen het secundair en het tertiair onderwijs komt uitstekend tot zijn recht. Freudenthal's streven is daarbij de befaamde breuk tussen de schoolwiskunde en de universitaire wiskunde te helen en wel in de eerste plaats door de zelfstandige woekering van de schoolwiskunde te bestrijden. Deze strijd leidt tot radicale programmawijzigingen. 'Nach einem Jahrhundert selbständigen Lebens war die Schulmathematik in einer Sackgasse, die nirgendwohin führte, weder in die höhere Mathematik noch ins Leben. Bei der niederländischen Schulmathematik galt das für zwei Drittel des Stoffes und für 100% der Methode' (112).

7 Op wie en waarop steunt Freudenthal's radicalisme? Een opsomming van namen vindt men in zijn voorwoord. De auteur wijst er daar uitdrukkelijk op, dat zijn pedagogisch-didaktische opvattingen in sterke mate beïnvloed werden door het werk van de Belgische pedagoog *Decroly* (1871–1931), door de

Nederlandse wiskundige *L. E. J. Brouwer* (1881–1966) en door het werk van de *Van Hieles*.
Decroly's denkbeelden inzake l'enseignement concret, l'enseignement actif, la globalisation, les centres d'intérêt hebben op het Belgisch onderwijs indertijd grote invloed uitgeoefend, maar het lukt me niet deze invloeden in het Belgisch wiskunde-onderwijs na zijn jongste ontwikkelingen terug te vinden.
In Brouwer's constructieve opvattingen inzake de wiskunde zoals die tot uitdrukking gekomen zijn in zijn intuïtionisme vond Freudenthal een grondslag voor de ontwikkeling van zijn onderwijskundige denkbeelden. In sterke mate heeft Freudenthal zich laten beïnvloeden door de discussies in de Wiskundewerkgroep van de W.V.O. in de jaren 1945–1963, waarin hijzelf als voorzitter van de groep is opgetreden en waarbij de onderwijskundige denkbeelden van P. M. van Hiele (geb. 1909) en D. van Hiele-Geldof (1912–1958) in het centrum van de discussie stonden. Vooral de door hen ontwikkelde theorie van de denkniveaus werd daarin van betekenis.
We lichten de betekenis van deze denkniveaus op grond waarvan de leerstof in onderscheiden ronden wordt behandeld toe aan de hand van de toepassing ervan op het meetkunde-onderwijs.
'Im Anfang des Geometrieunterrichts steht das mathematische Ordnen der Erscheinungen im Raum, wodurch Gestalten zu Figuren werden' (119). De leerlingen bevinden zich doorgaans bij hun komst op de middelbare school nog op het 'nulde denkniveau', in het voorstadium van het ruimtelijke denken. Het eerste denkniveau waarmee de leraar te maken krijgt is nu dat van het meetkundig ruimtelijk denken. De buitenwereld wordt onder meetkundig gezichtspunt beschouwd; de leerlingen leren de figuren kennen met hun symbool- en signaalkarakter. Ze worden geconfronteerd met het aspect van de meetkunde.
Op het tweede denkniveau leert de leerling de samenhang die er tussen reeds ontdekte eigenschappen bestaat kennen. 'Auf höherer Stufe wird das Handeln der niedrigeren Stufe Gegenstand der Analyse' (116). In dit stadium leert de leerling onderscheiden tussen een stelling en zijn omgekeerde.
Eerst als de leerling weet wat bewijzen is wordt het zinvol hem te confronteren met een logisch opgebouwd systeem van stellingen. Op dit hogere niveau maken de leerlingen kennis met het wezen van de meetkunde. Vanuit logisch standpunt geldt dat iedere volgende fase de metatheorie betekent van de eraan voorafgaande (598).
De opvattingen van de Van Hieles leiden ertoe, dat er gebroken wordt met de vroegtijdige aanbieding van een deductief opgebouwd meetkundig systeem zoals dat in het traditionele meetkunde-onderwijs was ingeburgerd.
Deze theorie van de denkniveaus loopt als een rode draad door het geheel van Freudenthal's oeuvre. In elk van de hoofdstukken die zich met de afzonderlijke vakgebieden bezighouden vindt men waardevolle concrete aanwijzingen die moeten helpen voorkomen dat er op een te hoog niveau wordt onderwezen, dat er een overijld beroep wordt gedaan op een nog niet ontwikkeld abstraherend vermogen, dat er prematuur een deductief systeem van stellingen wordt gepresenteerd.

8. Op welke wijze wenst Freudenthal de doelstellingen van het wiskundeonderwijs te doen bereiken?
In zijn filosofie zijn op de lagere niveaus, in die van het eerste denkniveau, de activiteiten van het schematiseren en van het formaliseren van wezenlijke betekenis. Deze twee activiteiten onderscheidt hij als volgt:
'Ich möchte wo das Denken im engeren Sinne Gegenstand der mathematisierenden Tätigkeit ist, vom *Schematisieren* sprechen; wo das sprachliche Formulieren einen mathematischen Charakter annimmt, also das Streben nach einer mathematisch einwandfreien Sprache bemerkbar ist, will ich von *Formalisieren* sprechen' (558).
Geformaliseerde wiskunde dient de leerling nergens in eindvorm te worden gepresenteerd. Leerlingen dienen aan de hand van een beperkte leerstof het formaliseren zelf te leren. Evenzo het schematiseren. Uitgaande van een groep stellingen inzake het parallellogram geeft Freudenthal aan welke activiteiten van de leerling in deze fase van belang zijn. '... jede allgemeine Aussage über das Parallelogram ist ein mathematischer Satz, aber das System dieser Sätze ist an und für sich ein wüster Haufen, und es wird erst Mathematik wenn man es durch logische Relationen strukturiert, und das ist Mathematisieren' (127).
'Keine Mathematik ohne Mathematisieren, und insbesondere keine Axiomatik ohne Axiomatisieren, kein Formalismus ohne Formalisieren.... Dies ist eine Konsequenz der Interpretation der Mathematik als Tätigkeit'.
Fundamenteel in Freudenthal's onderwijsfilosofie zijn verder zijn beschouwingen over de plaats van de 'toepassingen' in dat onderwijs. Hij pleit voor een voortdurende wisselwerking tussen die toepassingen enerzijds en de eigenlijke wiskundige vorming anderzijds. Bij zijn stofkeuze dient de docent van toepassingen uit te gaan en de verworven wiskundekennis moet weer voor nieuwe toepassingen worden gebruikt. Het gaat er echter niet om dat de leerlingen naast 'zuivere wiskunde' nu ook 'toegepaste wiskunde' zullen gaan leren, het wezenlijke probleem is hoe we onze leerlingen leren wiskunde te leren toepassen. Dit doel dient bij een opbouw van een wiskundedidaktiek voortdurend in het oog gehouden te worden. De onderhavige problematiek heeft Freudenthal in 1968 uiteengezet in een rede onder de titel '*Why to teach mathematics so as to be useful*'.
Freudenthal pleit voorts voor een integratie van de leervakken, echter niet voor een integratie van de wiskunde met andere leervakken, maar wel voor een integratie van de leervakken rondom de wiskunde, dat is dus voor een integratie met de wiskunde als kernvak.
De centrale betekenis door Freudenthal toegekend aan alle wiskundeonderwijs krijgt een bijzonder reliëf door zijn opvatting dat die betekenis niet beperkt blijft tot de leerlingen die de wiskunde later nodig zullen hebben. Hij bepleit 'dass auch die andere, die die Mathematik niemals anwenden werden, Mathematik lernen sollen, weil sie sie nötig haben um ganz Mensch zu sein' (70).
Belangrijk zijn Freudenthal's kritische beschouwingen over de wijze waarop de 'moderne wiskunde' onze scholen binnen dringt. Onder deze naam dreigt een stroom van gedegenereerde wiskunde de markt te gaan overspoelen (256). Het niveau van de didaktiek van de wiskunde loopt erdoor gevaar teruggeschroefd te worden tot dat van meer dan een eeuw terug, toen men in school-

boeken nog kon lezen: 'Unter den Zahlen gibt es ganze, negative, gebrochene, arabische, römische, konstante und veränderliche' (257).
Ernstige bezwaren heeft de auteur tegen de wijze waarop zeer veel leerboekschrijvers met verzamelingen van letters omspringen. Voor een uitvoerige uiteenzetting van deze bezwaren verwijzen we de lezer naar het artikel dat in Euclides 45 onder de titel *Verzamelingen in het onderwijs* werd opgenomen.
'Mit endloser Geduld haben die Lehrer den Schülern einprägen wollen dass die Buchstaben in der Algebra etwas bedeuten, dass keine Formel sinnvoll ist, wenn man nicht weiss, was der Sinn ihrer Bestandteile ist, dass Algebra nicht ein sinnloses Spiel mit Buchstaben ist' (258).
Ook voor de zich inburgerende gewoonte in het beginonderwijs allerlei familierelaties ten tonele te voeren heeft de auteur geen goed woord over.
Een opvallende bijzonderheid van Freudenthal's scherpe, emotioneel geladen kritiek op leerboeken en leerboekschrijvers is het bijna systematisch weglaten van de namen van bekritiseerde auteurs en van citaten uit hun werken, tenzij dit hier en daar kan gebeuren in lovende zin. Zijn kritiek wint daardoor aan zakelijkheid: hij valt steeds nauwkeurig aangewezen ideeën, methoden aan, nergens personen.
Het misbruik dat er in de wiskundige didaktiek meer en meer van de naam Piaget gemaakt wordt brengt Freudenthal er echter wel toe in een appendix uitvoerig in te gaan op de bezwaren die er rijzen tegen de denkpsychologische onderzoekingen van Piaget, in het bijzonder tegen diens onkritisch taalgebruik. 'Jedermann, der Piaget liest, fragt sich sogleich, ob die Versuchspersonen denn die Fragen des Versuchsleiters überhaupt verstanden haben' (302).
Zorgvuldig gaat Freudenthal na welke wiskundige termen in Piaget's psychologie een rol spelen in betekenissen die van die welke in de wiskunde zelf gelden afwijken. Daardoor schept Piaget's wiskundige terminologie hopeloze verwarring. Maar: 'wenn schliesslich Didaktiker und Lehrbuchverfasser, die sich auf Piaget berufen, nicht merken, dass die Piagetschen Begriffe sich mit den gleichnamigen der Mathematiker nicht decken, so sind sie mitverantwortlich an der entstandenen Konfusion' (296).

9. Welke betekenis verwachten we van Freudenthal's werk voor de ontwikkeling van ons wiskunde-onderwijs in de naaste toekomst? Volgens zijn eigen constatering heeft hij geen didaktiek van de wiskunde geschreven in die zin dat er over de wijze waarop het onderwijs gegeven zou moeten worden een samenhangend geheel van opvattingen zou worden gepresenteerd. 'Es ist auch keine systematische Lehrstoffanalyse' (7).
Maar een kritische analyse is het wel, een gedocumenteerd en vlammend protest tegen al wat de auteur aan misstanden in ons wiskunde-onderwijs meent te kunnen onderkennen.
Een kritische analyse van een lange serie, fundamentele problemen uit alle sectoren van ons wiskunde-onderwijs, van de kleuterschool tot de universiteit toe. Een kritische analyse, tot stand gebracht door een uitermate competent beoordelaar die èn als wiskundige èn als pedagoog ongerust is over een aantal ontwikkelingen die de vernieuwing van vandaag dreigt te nemen, en die het hoofd wil bieden aan alle verstarrende tendenzen die er nog in ons onderwijs aanwezig zijn.

Het werk is van fundamenteel belang voor alle wiskundeleraren in functie en voor hen die zich op deze taak voorbereiden, maar dient daarnaast ook gelezen te worden door hen die hun levenstaak in de school achter zich hebben, maar hun belangstelling voor de didaktische problematiek nog niet hebben verloren.
Toekomstige auteurs van leerboeken, didactici aan de onderscheiden leraarsopleidingen zullen niet voorbij kunnen gaan aan Freudenthal's indringende kritiek zonder schade te berokkenen aan eigen werk. Het is te hopen dat ze afwijkende standpunten met dezelfde duidelijkheid zullen weten toe te lichten als Freudenthal het met zijn standpunten heeft gedaan.
Het tot stand komen van een integrale didaktiek voor ons wiskunde-onderwijs blijft ondertussen toekomstmuziek. Het zal nog wel heel wat voeten in de aarde hebben voor er een bruikbare blauwdruk voor de onderwijspraktijk in Freudenthal's geest tot stand zal zijn gebracht. Het is een gelukkige omstandigheid dat op het vele voorbereidend werk dat er nog moet worden verzet op weg naar zo'n blauwdruk Freudenthal zelf als directeur van het IOWO en als voorzitter van de CMLW grote invloed zal kunnen uitoefenen.

10. Ik heb Freudenthal's beide delen geboeid gelezen en grote delen ervan herlezen, overal met waardering, uiteraard niet steeds met instemming. Zijn verwijten aan de leraar en zijn werk, aan de auteurs van schoolboeken en de uitgevers van deze boeken zijn m.i. niet steeds billijk, zijn kijk op het huidige onderwijs niet steeds juist. Het tekort schieten van de universiteiten ten aanzien van een efficiënte leraarsopleiding komt niet uit de verf. Voor opvattingen die van de zijne afwijken brengt de auteur te vaak onvoldoende begrip op.
Onder de talrijke doorgaans welgekozen en van grote belezenheid getuigende citaten, die als motto boven de diverse hoofdstukken dienst doen, wil ik er één dat m.i. minder goed gekozen is signaleren.
Boven het hoofdstuk '*Der Unterricht*' prijken de regels:

> Wenn alles schlaft und einer spricht,
> Den Zustand nennt man Unterricht.

Een motto van een in 1832 geboren auteur dat Freudenthal zo waardevol acht dat hij het ook nog eens in de tekst citeert (62).
Zijn deze regels inderdaad representatief voor ons onderwijs in de wiskunde anno 1974? De dichter overleed reeds in 1908! De slogan was in het begin van deze eeuw reeds populair. Ook Lietzmann citeerde ze in zijn didactisch werk.
Gaat de waarde ervan uit boven die van de regels:

> Als de docent niet boeien kan
> Vangt dra de klas te stoeien an.

Ook dit zijn slechts regels op Kikeriki-niveau maar ze doen in elk geval uitkomen, dat het in slaap vallen van onze leerlingen niet tot de meest in het oog vallende, verontrustende eigenschappen behoort van onze huidige schoolklassen en voor die van het jongste verleden.

Ook ben ik niet gelukkig met Freudenthal's commentaar op de 'goede leraar' (59). De auteur werd teleurgesteld door de ervaring dat bij abituriënten de waardering voor hun oud-leraar wiskunde allereerst diens vermogen om goed te kunnen uitleggen gold. Nu wordt weliswaar in het hedendaags onderwijs de docent meer en meer de man op de achtergrond, wiens hoofdtaak van het uitleggen van stukken leerstof verschoven wordt naar de begeleiding van het leerproces van zijn leerlingen, maar ook bij deze ontwikkeling blijft het duidelijk kunnen uitleggen een eigenschap die de docent niet anders dan tot grote schade aan zijn onderwijs zal kunnen ontberen.
Met Freudenthal acht ik de werkvorm van de herontdekking van grote waarde voor ons onderwijs, al acht ik integrale toepassing ervan uitgesloten. En ik waardeer ze slechts daar waar de 'output' ervan die van de andere werkvormen overtreft. De didaktische consequenties interesseren mij wel (60). Ik laat de mogelijkheid open dat bijvoorbeeld de resultaten van de dialektische methode bij tal van situaties die van de herontdekking zullen overtreffen. Het herontdekken stond trouwens ook in het verleden niet zo slecht aangeschreven als de kritiek van vandaag ons zou willen doen geloven; zie maar naar de betekenis die de Nacherfindung heeft gehad bij het oplossen van meetkundevraagstukken. Er valt trouwens reeds een generatie lang in ons land belangstelling voor diverse 'zelfwerkzaamheidsmethoden' te constateren, die evenmin als die van Freudenthal's Nacherfindung in conflict behoeven te komen met het emancipatiestreven van onze jeugd, aan welk streven Freudenthal in zijn filosofie een doorslaggevende betekenis toekent.
Met de uitspraak 'Die Nacherfindung im Lehrprozess muss programmiert werden' (151) ben ik allesbehalve gelukkig. Ik kan er onvoldoende begrip voor opbrengen, zolang ik niet over meer materiaal beschik dat me in deze vertrouwen zou kunnen inboezemen. De betekenis van de persoonlijkheid van de leraar komt in de bundel m.i. onvoldoende tot zijn recht. De leraar staat in zoveel opzichten voor zijn leerlingen model, ook ten aanzien van creatieve prestaties, dat vervanging van hem door onpersoonlijke programmering voor mij vooralsnog weinig aanlokkelijk is.

11. Het zou verleidelijk zijn aan het hier gegeven overzicht van Freudenthal's opvoedingsfilosofie nog een lijst toe te voegen van kernachtige uitspraken uit de bundel die zijn standpunten karakteriseren. Ik doe dit niet, maar verwijs de belangstellende lezer naar de boeken zelf.
Klett's Verlag in Stuttgart heeft ze uitgegeven. Beide in een welverzorgd, handig formaat, waardoor deze Duitse uitgave wel eens een ernstige 'concurrent' zou kunnen worden van de eerder verschenen Engelse uitgave.

Zie voor deze Engelse uitgave Euclides 49, p. 76 en 77.

Beide delen kosten gekartonneerd 20 DM per stuk.

Een controverse

In Euclides *39*, blz. 1–15 vindt men een artikel van Prof. Dr. E. M. Bruins, getiteld Niet-euclidische euclidische meetkunde. De essentie van het artikel bestaat uit het construeren van een afwijkend model voor de meetkunde van Euclides.

In Euclides *48*, blz. 13–18 antwoordt Hans Freudenthal hierop in een artikel, getiteld Nieuwe niet-euclidische meetkunde. De auteur zet hier uiteen, dat het model van Prof. Bruins niet aan alle tien postulaten en axioma's van Euclides voldoet.

Prof. Bruins verzoekt thans opname van een artikel waarin hij de beweringen van Prof. Freudenthal bestrijdt. A angezien artikelen als deze eigenlijk niet thuishoren in een tijdschrift voor de didactiek van de wiskunde, acht de redactie het beter de discussie in deze voor gesloten te verklaren.

In het artikel van Prof. Freudenthal komen naast wetenschappelijke argumenten in de laatste alinea ook persoonlijk gerichte bezwaren voor. De redactie heeft steeds op het standpunt gestaan dat het niet gewenst is in Euclides voor het formuleren van persoonlijke tegenstellingen plaatsruimte af te staan. Ze had dan ook verstandig gedaan Prof. Freudenthal te verzoeken de laatste alinea van zijn artikel ongeschreven te laten.

Redactie

Derde internationaal congres over het wiskunde-onderwijs

Dit congres zal plaats vinden van 16 tot en met 21 augustus 1976 te Karlsruhe. De eerste aankondiging van het congres is onlangs verschenen. Wie het niet ontvangen mocht hebben en er zich voor intereseert kan zich richten tot:

3rd International Congress on Mathematical Education University
D75 Karlsruhe (FRG)

Boekbespreking

Günther Lobin, *Rechnerkunde*; 4. Paderborner Werkstattgespräch; 218 bladz.; 1973; Schöningh-Schroedel, Paderborn-Hannover.

Dit boekje bevat een rijk gedocumenteerd verslag van een conferentie in oktober 1972 gehouden in het 'Forschungs- und Entwicklungszentrum für objektivierte Lehr- und Lernverfahren', een conferentie georganiseerd in samenwerking met de instituten 'für Kybernetik und für Bildungsinformatik'. Het karakter ervan wordt scherper dan door de titel 'Rechnerkunde' tot uitdrukking gebracht door de ondertitel die aan het verslag werd toegevoegd: 'Algorithmen und DVA-Strukturen'.
'Rechnerkunde' is te beschouwen als een onderdeel van de informatica. Verstaat men onder informatica de wetenschap die zich bezig houdt met de theoretische en praktische aspekten van het verwerven, vervoeren, opslaan, verwerken en verstrekken van informatie door automatische informatieverwerkende systemen, dan is de 'Rechnerkunde' te beschouwen als een stuk 'Elementar Informatik' en valt grotendeels samen met wat we in Nederland onder computerkunde verstaan. De ondertitel met de term 'Datenverarbeitungsanlagen' is zinvoller dan de hoofdtitel 'Rechnerkunde' die misplaatste associaties zou kunnen geven.
Het boekje bevat een viertal artikelen over 'Lehrziele und Lehrzielbegründungen' en drie die handelen over 'Algorithmen im Unterricht'. Verder vijf die zich bezig houden met specifieke, moderne hulpmiddelen in het computeronderwijs en tenslotte nog vijf over 'Die Rechnerkunde im Rahmen kybernätischer Lehrpläne'.
De verslagen verdienen de aandacht van allen die zich voor de ontwikkeling van de computerkunde in ons algemeen vormend onderwijs interesseren.

Joh. H. Wansink.

J. J. Sloff e.a., *Mathematische Statistiek 1 voor het v.w.o.*, Experimentele uitgave.
Wolters-Noordhoff, Groningen, 1974, 120 blz., *f* 8.50.

Deze experimentele uitgave is samengesteld door de auteursgroep Jagt, de eerste letters van de voornamen van de auteurs. De eerste auteur heeft zijn laatste letter verloren.
Hoofdstuk O, behandelt de combinatoriek, een onderwerp, dat naar de mening van de auteurs in een lagere klas kan behandeld worden, al lijkt mij handhaving niet misplaatst.
Dan volgen: Kansen (18 blz.), Stochasten (25 blz.) en Binomiale verdeling (22 blz.). De verzameling antwoorden 23 blz.
Het zou prettig zijn als men op elke bladzijde het nummer van het hoofdstuk vermeldde, dit vergemakkelijkt het opzoeken van verwijzingen.
Het boekje maakt, ook door de vele aardige opgaven, een prettige indruk, al zal na een gebruik in klasverband een oordeel meer gedegen worden.

Enkele opmerkingen: blz. 89 in formule voor P_2: $\binom{R}{N} \rightarrow \binom{R}{r}$;

blz. 102 in 7e: $P(G_2 \cup G_3) \rightarrow P(G_2 \cap G_3)$

blz. 103 in 10b: $\frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{13}$.

dr. W. A. M. Burgers

Auteursgroep Jagt, *Mathematische Statistiek 2 voor het V.W.O.*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1975, 48 blz., f 3,50.

In dit tweede deel dat zonder bezwaar met deel I kan worden samengevoegd tot één geheel, wordt het toetsen behandeld (33 blz.). In het aanhangsel wordt de voorwaardelijke kans besproken, waaruit de al of niet onafhankelijkheid van twee gebeurtenissen in een kansexperiment.

W. Burgers

E. Bouqué, *Opbouw* 6a, *Wiskunde voor het secundair onderwijs*, Wesmael-Charlier, Namen 1973, XV + 328 blz.

Deze uitgave is bestemd voor de hoogste klasse van de Latijn-Wiskunde en Wetenschappelijke A, dus voor die afdelingen van het voortgezet onderwijs waar aan de wiskunde de hoogste eisen gesteld worden.
Het boek gaat uitsluitend over de kegelsneden. De behandelingswijze is vectorieel; elk punt is dus gekenmerkt door een geordend paar getallen. In eerste instantie is dat een geordend paar reële getallen. Daarna wordt overgegaan tot homogene coördinaten en wordt het punt dus bepaald door de verhouding van een geordend drietal reële getallen. En dan ten slotte, en dat is essentieel, worden ook complexe getallen als coördinaten toegelaten.
De eerste uitbreiding van het puntbegrip maakt richtingen tot punten. De tweede uitbreiding is van veel ingrijpender aard. Zodra complexe getallen toegelaten worden, is het niet meer mogelijk een euclidisch-meetkundige interpretatie te geven van het algebraïsch rekenwerk. Invariantie van eigenschappen bij transformatie van de basis moet nu bewezen worden en kan niet meer gefundeerd worden op reeds aanwezige kennis van de euclidische meetkunde. Om een voorbeeld te noemen: bij de classificatie van kegelsneden wordt gebruik gemaakt van transformatie van de basis. Het teken van de kwadratische en van de kubische determinant speelt bij de classificatie een rol. Men dient dus aan te tonen, dat dit teken bij overgang op een andere basis niet verandert. De auteur doet dit inderdaad. Ik heb voor deze zorgvuldigheid grote waardering. Maar toch vraag ik mij af, of de leerling in staat is de portee van deze handelwijze te doorzien.
Eén consequentie van het invoeren van complexe punten kan ik moeilijk volgen. Het ligt voor de hand door extrapolatie uitgaande van de definities van begrippen uit de reële meetkunde analoge definities betreffende complexe meetkunde op te stellen. De gebruikelijke afstandsdefinitie in de reële (niet homogene) meetkunde is: $d = \sqrt{((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)}$. De auteur neemt deze definitie zonder meer over in de complexe meetkunde. Dit heeft als noodlottig gevolg, dat in de complexe meetkunde de afstand van twee verschillende punten gelijk aan 0 kan zijn. Dit is in strijd met het hedendaagse afstandsbegrip. Het lijkt me dat dit op de een of andere manier voorkomen moet worden.
Tot slot nog iets over de behandelde stof. Ter sprake komen; pooltheorie, kegelsnedenbundels, middelpunt en middellijn, assen, en eerst aan het eind brandpunt en richtlijn. Men ziet nauwelijks enige verwantschap met onze vroegere analytische-meetkundeboeken. De begrippen worden van meer algemeen standpunt en daardoor op fraaiere wijze ingevoerd dan vroeger het geval was. Menig leraar zal het boek dan ook met genoegen lezen, al kent hij de resultaten uiteraard. De schrijver ontpopt zich ook in dit werk als een ongemeen helder stilist.
Het is verbazingwekkend te zien op welk hoog peil het onderwijs over de kegelsneden staat. Het wordt in België een zeer belangrijk onderwerp gevonden. Maar ook het Belgische onderwijs is op dit moment in „mammoetbeweging". De gevolgen hiervan zullen o.m. zijn dat het aantal uren dat aan wiskunde besteed wordt, terugloopt. Men voorziet wel, dat het daardoor noodzakelijk zal worden zich t.a.v. het onderwerp kegelsneden beperkingen op te leggen. Jammer voor dit mooie boek.

P. G. J. Vredenduin

Z. P. Dienes, *De zes stadia in een wiskundig leerproces*, Wiskunde-paperbacks, Malmberg/van In, 60 blz., ƒ4,50. ISBN 90 208 58424.

De inhoud is kort: 1 Beschrijving der verschillende stadia – 2 Het leren van enkele logische begrippen – 3 Het leren van de isometrieën van de gelijkzijdige driehoek (waarom gebruikt men hier niet het eenvoudige woord zelfcongruenties?) – 4 Het leren van een orderelatie – 5 Conclusie.
De kwaliteit van dit werkje is hoog, de kwantiteit gering in vergelijking met het daaraan voorafgaande deeltje van dezelfde serie. Men kan schertsend zeggen, dat de waarde omgekeerd evenredig met de dikte is.
Ik heb geen enkele *aan*merking, slechts een kleine *op*merking, en wel over blz. 27. Als men hierop het *plaatsprincipe* van de didactiek toepast (de plaats, waar men een mededeling neerzet en de ordening van de onderdelen kan een gunstige invloed hebben op de opname) dan vindt men de volgende rangschikking bij het transitiviteitsvoorbeeld van punt 4:

$x = y$
$y = z$ dus
$x = z$

Het is mij in de praktijk gebleken, dat dit gewaardeerd wordt.
Als onze onderwijsmensen dit boekje, liefst onder deskundige leiding, doorwerken en navolgen, dan kan dit de kwaliteit van ons onderwijs alleen maar ten goede komen.
Blijft de vraag of het de enig juiste weg is. Als jonge kinderen in concrete vorm met simpele meetkundige figuren en hun eenvoudigste eigenschappen worden geconfronteerd, dan kan het enthousiasme van een leraar heel wat bereiken. Ik ben de kreet: 'Ha, meetkunde' nog niet vergeten.

J. K. Timmer.

R. Schassberger, *Warteschlangen*, Springer Verlag Berlijn, 1973, 213 blz., prijs D.M. 69,–.

Dit boek richt zich hoofdzakelijk tot de lezer die geïnteresseerd is in de mathematische aspekten van de wachttijdtheorie. De auteur analyseert een aantal standaardmodellen met behulp van een algemeen toepasbare methode die een generalisatie is van de bekende fasenmethode afkomstig van A. K. Erlang. De G/G/1 wachtrij, de G/G/s wachtrij, een tweetal prioriteitsmodellen voor de G/G/1 wachtrij en een tweetal „time-sharing"-modellen voor de M/M/1 wachtrij worden behandeld. Daarnaast wordt ingegaan op de wachttijdformule $L = \lambda W$ en op een aantal limietstellingen voor de G/G/1 wachtrij.
Het boek is gedegen geschreven en mag een aanwinst genoemd worden voor de (mathematische) wachttijdliteratuur.

H. C. Tijms

Werner Markwald, e.a., *Beiträge zum Mathematikunterricht 1973*; 312 blz.; DM 49,60; bestelnummer 35009; Schroedel Verlag KG, Hannover 1974.

Deze *Vorträge auf der 7. Bundestagung für Didaktik der Mathematik* bevatten een veertigtal verslagen van inleidingen in maart 1973 te Worms gehouden.
Analoge didaktische congressen over wiskundige problematiek hebben in Duitsland sinds 1967 plaats en de verslagen ervan worden regelmatig door het Schroedel Verlag uitgegeven. We verwijzen voor de congressen te Frankfurt (1968) en te Ludwigsburg (1969) naar *Euclides* 48, p. 115.
Het lijkt me niet goed mogelijk de rijke inhoud van deze nieuwe bundel hier in deze aankondiging tot zijn recht te doen komen, maar ik ben ervan overtuigd, dat alle wiskundedocenten bij het basisonderwijs, bij het voortgezet onderwijs en bij de onderwijzers- en lerarenopleidingen die zich voor de ontwikkeling van de didaktiek van hun vak interesseren, in deze nieuwe bundel veel van hun gading zullen kunnen vinden.

Joh. H. Wansink.

Tomio Kubota, *Elementary Theory of Eisenstein Series*, Kodanska Ltd and J. Wiley, Tokio and New York, 1973.

Dit boek is een uitwerking van een reeks colleges in 1970–1971 door de auteur aan de universiteit van Maryland gegeven. Een eenvoudig voorbeeld van Eisenstein reeksen wordt gegeven door $E(z, s) = \frac{1}{2}\sum_{(c,d)} y^s|cz+d|^{-2s}$, $z = x+iy$; $c, d \in \mathbb{Z}$; $(c, d) = 1$.
Als functie van s is E een meromorphe functie, als functie van z is E niet analytisch maar voldoet aan de differentiaalvergelijking $y^2(\delta^2/\delta x^2 + \delta^2/\delta y^2)E = \lambda E$.
De functie is een automorphe functie, hij is invariant onder gebroken lineaire transformaties met gehele coefficiënten en determinant 1. Twee problemen worden behandeld. De reeks definieert de functie slechts in een halfvlak voor s; de functie wordt voortgezet en een functionaalvergelijking analoog aan die voor de klassieke zetafunctie wordt afgeleid. Verder worden deze reeksen gebruikt voor het construeren van representaties van de speciale lineaire groep in 2 dimensies over de reële getallen; de spectraalanalyse van deze representatie wordt onderzocht. Het woord elementair in de titel slaat op het feit dat alleen de speciale lineaire groep van dimensie 2 wordt bekeken. In het werk van Harish Chandra, Langlands en anderen is het probleem meer algemeen voor Lie groepen behandeld. Het boekje is prettig en duidelijk geschreven, maar vraagt wel een behoorlijke mathematische rijpheid om naar waarde geapprecieerd te kunnen worden.

F. van der Blij.

ontvangen boeken

1 Informatie: *Beroepsgerichte vakken*
uitgaven van Kluwer Schoolboeken. Stam, Technische boeken
Stam/Robijns en Tjeenk Willink/Noorduyn
Productie en verkoopmaatschappij Educaboek N.V., Culemborg

2 Informatie: *Algemeen vormende en technische vakken*
Wiskunde en rekenen voor LBO en LAVO

Passen en meten 2

Wolters Noordhoff, Groningen, 79 blz., f 7,45.

Nederlandse Onderwijstelevisie
P. Scholten, *Leerlingenwerkboek Vierkan't*, met bijbehorende eenvoudige rekenschijf
Onderwijzersboek Vierkan't

Rekenliniaal Darmstadt
ISBN 9001.95791.9, Prijs f 23,–, Wolters Noordhoff, Groningen. 1975.

L. J. Meeus, *Sterrengids 1975*, H. D. Tjeenk Willink, Groningen, 89 blz. f 14,–, van de hand van H. Terpstra, een artikel over Eise Eisinga en zijn planetarium.

Tafels wiskunde statistiek, Wolters-Noordhoff 1974, 2e druk, 80 blz., *f*7,–.

De tafel bevat naast de gebruikelijke gegevens en tabellen ook die tabellen die bij de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek gebruikt worden

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

329 Het onderstaande is een variatie op een bekend spelletje.
A kiest een getal van vier verschillende cijfers; het mag met een 0 beginnen. Bijv. 1827. B tracht het getal te raden en raadt bijv. 1234. A antwoordt: 1 raak en 1 goed. Het cijfer 1 komt namelijk in het getal van A voor op dezelfde plaats als in het getal van B; het cijfer 2 komt voor maar niet op dezelfde plaats. Daarna raadt B bijv. 5678. Het antwoord luidt nu: 2 goed. De cijfers 7 en 8 komen beide voor, maar op andere plaatsen dan in het getal van B.
We stellen nog de volgende voorwaarden. B mag in zijn getal geen cijfer meer dan éénmaal laten voorkomen. B hoeft geen vier cijfers te noemen; hij mag volstaan met minder bijv. met 6.87. De tweede plaats wordt dus opengelaten in dit geval. Het antwoord luidt: 1 goed (de 8) en 1 raak (de 7). B mag ook meer dan één plaats open laten.
Gevraagd een optimale strategie voor B om het getal te raden.

Men kan zich hier leuk mee vermaken. Ik heb gevonden dat B gegarandeerd in 8 keer raden het getal kan vinden. De oplossing zal ik niet publiceren, omdat dit te veel ruimte zou vergen en onleesbaar zou zijn. Bovendien ben ik ervan overtuigd dat het in 7 keer ook wel zal lukken, maar het lijkt me een heidens werk dat uit te knobbelen. Als iemand erin slaagt, houd ik mij natuurlijk aanbevolen.

Ondertussen zou ik toch wel aan dit spel een opgave willen ontlenen die de moeite, ook van het beantwoorden, waard is. Deze luidt: B raadt 1234. Hij krijgt als antwoord: 2 goed. Gevraagd in een minimaal aantal keren raden erachter te komen, welke twee cijfers goed zijn en waar die in het getal van A voorkomen.

330 Opgave. Is.

$$A \Rightarrow B \vee C \tag{1}$$

gelijkwaardig met

$$(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C) \qquad (2)?$$

1e oplossing. Is A waar dan is (1) waar als B en C minstens een van tweeën waar zijn, en anders niet.
Hetzelfde geldt voor (2).
Is A onwaar, dan zijn (1) en (2) beide waar.
(1) en (2) zijn dus gelijkwaardig.
Men ziet dit ook door het uitschrijven van de waarheidstabellen.
2e oplossing.

$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ is waar.
$ab = 0 \Rightarrow a = 0$ en $ab = 0 \Rightarrow b = 0$ zijn beide niet waar.
$(ab = 0 \Rightarrow a = 0) \vee (ab = 0 \Rightarrow b = 0)$ is dus niet waar.
(1) en (2) zijn dus niet gelijkwaardig.

Hoe zit het nu?

Oplossingen

327. Probleem is elk rationaal getal tussen 0 en 1 te schrijven als som van stambreuken met verschillende noemers.

Onderstel voor het rationale getal $\frac{a}{b}$ geldt

$$\frac{1}{n} < \frac{a}{b} < \frac{1}{n+1} (n \in \mathbb{Z})$$

Dan is

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n+1} + \frac{an+a-b}{b(n+1)}$$

Hierin is $an+a-b < a$ waaruit blijkt dat iteratie van dit proces tot de schrijfwijze leidt van $\frac{a}{b}$ als som van stambreuken met verschillende noemers.

328. Een verzameling van p elementen kan op p_1 manieren verdeeld worden in deelverzamelingen met verschillend aantal elementen en op p_2 manieren in deelverzamelingen met alle een oneven aantal elementen. We bewijzen, dat $p_1 = p_2$.
Daartoe moeten we laten zien dat er een bijectie tussen de verdelingen van de eerste soort en die van de tweede soort mogelijk is.
Aan een voorbeeld laten we zien hoe een dergelijke bijectie tot stand gebracht kan worden.
Onderstel een verdeling in delen met oneven aantal elementen bestaat uit 6 verzamelingen met 1 element, 5 met 3 elementen, 8 met 7 elementen en 3 met 11 elementen.
De getallen 6, 5, 8 en 3 schrijven we tweetallig.
$6 = 110$; de 6 verzamelingen met 1 element vervangen we door 0 met 1, 1 met 2 en 1 met 4 elementen;
$5 = 101$; de 5 verzamelingen met 3 elementen vervangen we door 1 met 3, 0 met 6 en 1 met 12 elementen;
$8 = 1000$; de 8 verzamelingen met 7 elementen vervangen we door 0 met 7, 0 met 14, 0 met 28 en 1 met 56 elementen;
$3 = 11$; de 3 verzamelingen met 11 elementen vervangen we door 1 met 11 en 1 met 22 elementen.
Zo is de gegeven verdeling in deelverzamelingen met oneven aantal elementen toegevoegd aan de verdeling $2+4+3+12+56+11+22$.
Men overtuigt er zich makkelijk van, dat op deze manier aan elke verdeling van de eerste soort eenduidig een verdeling van de tweede soort wordt toegevoegd en omgekeerd. Er is dus een bijectie tot stand gebracht. Waarmee bewezen is dat $p_1 = p_2$.

Internationale post-universitaire cursussen

Universiteit van Luik
17–23 augustus 1974

In 1975 organiseert België de 16e sessie van de 'Internationale Post-Universitaire Cursussen', vooral bestemd voor de leerkrachten, houder van een universitair diploma, die hun functie in het secundair en het technisch onderwijs uitoefenen. De belangstellenden worden door het organisatiecomité uitgenodigd in de lokalen van de Rijksuniversiteit te Luik, van 18 tot 23 augustus 1975.

Eens te meer zullen professoren van verschillende Europese universiteiten actuele wetenschappelijke onderwerpen behandelen, in de vier afdelingen: wiskunde, fysica, scheikunde en biologie. Zoals blijkt uit het programma, gaat het algemeen thema over de problemen van de energie in alle verschillende aspecten. Het comité durft te hopen dat de voorgestelde formule eenzelfde succes zal te beurt vallen als de thema's van vorige jaren.

Er zijn talrijke deelnemers, die de Internationale Post-universitaire Cursussen kennen en die, traditiegetrouw, ieder jaar weerkomen. We danken hen voor de betoonde belangstelling en tevens wensen en hopen we ook talrijke nieuwe deelnemers te mogen begroeten. Ze kunnen erop rekenen een week door te brengen, die hun een rijkdom van wetenschappelijke informatie en menselijke ervaring zal bijbrengen, opgedaaan in een sfeer van internationale verstandhouding en vriendschap.

Het wetenschappelijk en cultureel programma dat we U voorstellen, werd met dit doel ontworpen.

Bij voorbaat reeds wenst het organisatiecomité U hartelijk welkom!

Prof. Dr. A. Cottenie,
Voorzitter.

Mathematique - Wiskunde

Lundi - Maandag 18-8-1975

Prof. Dr. R. J. WILSON – The Open University.
14.00 History of graph theory.
Prof. Dr. B. GANTER – Technische Hochschule Darmstadt.
15.30 Graphs in biology.
16.30 Visite – Bezoek: maquette de l'Université.

Mardi - Dinsdag 19-8-1975

Prof. Dr. F. BUEKENHOUT – Université Libre de Bruxelles.
9.00 Les graphes et leurs symétries.
10.30 idem.
Prof. Dr. J. A. NASH-WILLIAMS – University of Reading.
14.00 Graph theory and its applications.
15.30 idem.

Mercedi - Woensdag 20-8-1975

Prof. Dr. R. J. WILSON – The Open University.
9.00 Graph theory in chemistry
Prof. Dr. B. GANTER – Technische Hochschule Darmstadt.
10.30 A graph-theoretical view of Kirchhoff's laws.
14.00 Après-midi de discussion.
16.00 Visite – Bezoek: cyclotron.

Jeudi - Donderdag 21-8-1975

Prof. Dr. X. HUBAUT – Université de Bruxelles.
9.00 Extensions de graphes
10.30 idem.

Prof. Dr. P. MANI – Universität Bern.
14.00 Quelques aspects de la théorie des graphes.
15.30 idem.

Vendredi - Vrijdag 22-8-1975

Prof. Dr. J. J. SEIDEL – Technische Hogeschool Eindhoven.
9.00 Graphs with structure, and their applications.
10.30 idem.
Prof. Dr. J. DOYEN – Université de Bruxelles.
14.00 Graphes et Jeux.
15.30 idem.

Inlichtingen betreffende deze cursussen: De heer P. Mispelter, Postbus 24, 1000 Brussel 29

INHOUD